آزمون نرمال بودن به کمک روش جارکو– برا و مقایسه آن با چند روش دیگر

حسین صیدخانی[1]

چکیده

ما در این مقاله ضمن معرفی چند روش مطرح از این گونه آزمونها که در بیشتر نرم افزارهای آماری موجودند به معرفی و روش به کارگیری آزمون نرمال بودن جارکو–برا[2] پرداخته و در نهایت به کمک داده‌های شبیه‌سازی شده این روش را با چند روش قدیمی‌تر مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

واژه های کلیدی: آزمون نرمال بودن، الگوریتم بوت استراپ، روش نرمال بودن جارکو – برا.

۱– مقدمه

یکی از مهمترین و جالب توجه‌ترین تست‌های آماری توزیع نرمال است. مبنا و پایه اساسی و اصلی اکثر آزمونهای آماری را فرض نرمال بودن و یا تقریباً نرمال بودن داده‌ها تشکیل می‌دهد.

آگوستینو و استفان[3][۲] یک توصیف کلی را از آزمونهای نرمال بودن ارائه کرده‌اند و همچنین چندین آزمون نرمال بودن را از لحاظ توان برآوردی بر اساس ۱۰۰۰ نمونه مونت کارلو برای تعداد زیادی از انواع مختلف توزیع‌ها با همدیگر مورد مقایسه قرار داده‌اند.

آزمون شاپیرو- ویلک[4] برای آزمون نرمال بودن داده‌ها روی هم رفته بهترین آزمون است اما متأسفانه این آزمون به طور یکنواخت پرتوان‌ترین آزمون برای تمام فرضهای مقابل نیست.

ما ابتدا در بخش اول به معرفی روشهای آزمون نرمال بودن به کمک نمودارهای توزیع داده‌ها و نمودارهای $q-q$ پرداخته و سپس در ادامه این بخش آزمونهایی برازندگی χ^2، کلموگروف – اسمیرنف و سپس آزمون نرمال بودن بر اساس ضرایب چولگی و کشیدگی را مورد توجه قرار می‌دهیم در بخش دوم به معرفی روش آزمون نرمال بودن جارکو – برا پرداخته و سپس در بخش سوم توسط شبیه‌سازی کامپیوتری به کمک داده‌های ۵۰ تایی، ۱۰۰ تایی، ۵۰۰ تایی و ۱۰۰۰۰تایی به مقایسه بین انواعی از روشهای آزمون نرمال بودن که در نرم افزارهای آماری موجودند با روش جارکو – برا می‌پردازیم.

۲– چند روش آزمون نرمال بودن

ابتدا به چند روش آزمون نرمال بودن می پردازیم:

الف: آزمون نرمال بودن به کمک نمودار توزیع داده‌ها

شاید بتوان گفت که ساده‌ترین و اولین روش در جهت بررسی وضعیت توزیع یک سری از مشاهدات استفاده از نمودار توزیع داده‌هاست. اما آیا همواره می‌توان برای یک حجم عظیم از مشاهدات از این روش استفاده نمود و اصولا میزان اعتماد به صحت برآورد در این روش چقدر است و یا به عبارت دیگر آیا می‌توان خطای حاصل از این روش را برآورد کرد؟ این روش اصولاً فاقد این جنبه‌های نظری است لذا سعی بر آن می‌شود تا به کمک روشهای دقیق‌تر و کاربردی‌تر و با در نظر گرفتن میزان خطا و همچنین دقت تقریب در جهت بررسی وضعیت نرمال بودن داده‌ها تصمیم گیری کرد.

---

[1] دانشگاه صنعت نفت اهواز

[2] Jarque Bera

[3] Agostino and Stephen

[4] Shapiro-Wilk

ب: روش نموداری چندک–چندک $q-q$

نمودارهای q-q نمودارهای ویژه‌ای هستند که از آنها می‌توان جهت ارزیابی فرض نرمال بودن داده‌ها استفاده نمود. این نمودارها نمودار چندک نمونه در مقابل چندکی است که اگر مشاهدات دارای توزیع نرمال باشند انتظار مشاهده آن را داریم اگر نقاط خیلی نزدیک به هم در امتداد خطی راست قرار گیرند آنگاه فرض نرمال بودن قابل دفاع است و اگر نقاط در اطراف خطی راست پراکنده باشند فرض نرمال بودن مورد شک و تردید خواهد بود.

ج: آزمون برازندگی χ^2

توزیعی که گمان می‌بریم داده‌ها از آن آمده باشند را توزیع برازنده بر داده‌ها و آزمونی را که باید برای بررسی درستی این گمان انجام داد آزمون برازندگی می‌نامند مشهورترین آزمونهای برازندگی آزمون χ^2 است.

گر چه به کرات در متون آماری برای آزمون نرمال بودن بودن از توزیع χ^2 استفاده می‌شود در صورتی که توزیع نظری توزیعی پیوسته باشد آزمون χ^2 مناسبترین آزمون نخواهد بود. آزمون کلموگروف–اسمیرنف[1] به ویژه برای آزمونهای برازندگی که توزیع‌های پیوسته در آن دخیل می‌باشند طرح ریزی شده است.

چ: آزمون برازندگی کلموگروف–اسمیرنف

اگر پژوهشگر بخواهد بررسی کند که توزیع داده‌های نمونه تا چه حد با توزیع نظری مطابقت دارد آزمونی موسوم به آزمون برازندگی کلموگروف–اسمیرنف جانشین آزمون برازندگی χ^2 می‌شود. آزمون مذکور با نام کلموگروف و اسمیرنف ریاضیدانان روسی نامیده می‌شود که در سال ۱۹۳۰ دو آزمون نزدیک به هم را معرفی کردند. کار کلموگروف به حالت یک نمونه‌ای مربوط می‌شود و اثر اسمیرنف حالتی را بحث می‌کند که در آن دو نمونه دخالت دارند.

کانور[2] [۵] و گودمان[3] [٦] در این زمینه مثالهای عددیی ارائه کرده‌اند محاسن و معایب آزمون برازندگی کلموگروف–اسمیرنف در مقایسه با آزمون χ^2 را نویسندگانی چون ماسی[4] [۷]، برون باوم[5] [٤] و استاکتر[6] [۸] مورد بحث قرار داده‌اند. آنچه در زیر می‌آید بعضی از این نکات مقایسه‌ای است:

۱- در آزمون کلموگروف–اسمیرف همانند آزمون χ^2 لزومی ندارد که مشاهدات گروه‌بندی شوند نتیجه تفاوت مذکور این خواهد بود که آزمون کلموگروف–اسمیرنف از همه اطلاعات موجود در مجموعه داده‌ها بهره‌برداری می‌کند.

۲- آزمون کلموگروف–اسمیرنف را با هراندازه نمونه می‌توان به کار برد ولی به منظور استفاده از آزمون χ^2 حداقل اندازه‌های معینی لازم است.

۳- آزمون کلموگروف–اسمیرنف در مورد برآورد پارامترها از نمونه قابل اعمال نیست اما آزمون χ^2 در موارد مزبور با کاهش یک درجه آزادی برای هر یک از پارامترهایی که باید برآورد شود بکار می‌رود.

د: آزمون نرمال بودن بر اساس چولگی و کشیدگی

یک توزیع نرمال توسط دو پارامتر میانگین جامعه و انحراف معیار جامعه کاملاً مشخص می‌شود و سایر گشتاورهای توزیع نرمال به کمک همین دو عنصر یعنی میانگین و انحراف معیار جامعه مشخص می‌شوند برای مثال ضریب چولگی جامعه با توزیع نرمال صفر است.

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

زیرا که در توزیع نرمال $\mu_3 = 0$ است. ضریب کشیدگی نیز برای جامعه نرمال صفراست

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

زیرا که برای توزیع نرمال $\mu_4 = 3\sigma^4$ است.

به کمک همین خواص توزیع نرمال می توان آزمونهایی برای بررسی فرض نرمال بودن داده ها ساخت.

۳–روش آزمون نرمال بودن جارکو–برا

جهت آزمون نرمال بودن داده‌ها معمولاً بهترین و کارآمدترین روش که سریعتر هم انجام می‌شود آزمون نرمال بودن به کمک شاخصه‌های توزیع نرمال خصوصاً ضرایب

[1] Kolmogorov-Smirnov
[2] Conver
[3] Goodman
[4] Massy
[5] Birnbaum
[6] Stakter

چولگی و کشیدگی می‌باشد لذا سعی بر آن می‌شود تا آماره‌ای مناسب باتوزیعی مشخص معرفی شود تا به کمک آن آزمون نرمال بودن داده‌ها سریعتر، بهتر و راحتتر همراه با دقت بیشتر صورت گیرد.

یک آماره مناسب که با تکیه بر همین دو خاصیت توزیع نرمال یعنی ضرایب چولگی و کشیدگی توسط برا و جارکو[1] [۳] در سال ۱۹۸۱ معرفی شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$JB = n\left\{\frac{(Skew)^{۲}}{۶} + \frac{(Kurt-۳)^{۲}}{۲۴}\right\},$$

که در آن $Skew$ ضریب چولگی و $Kurt$ ضریب کشیدگی داده و n هم حجم نمونه است.

توزیع این آماره نیز توسط همین دو نفر در سال ۱۹۸۱ به دست آمده است. این آزمونها تنها با در اختیار داشتن ضرایب چولگی و کشیدگی و حجم نمونه مورد نظر انجام می‌گیرد . این آماره خصوصا در مورد آماره‌های با حجم زیاد می‌تواندازکارآیی خوبی نسبت به بعضی از روشهای دیگر، به دلیل سادگی انجام، برخوردار می‌باشد و پابه پای دیگر آزمونهای خوب و پرتوان جواب مناسب را فراهم می‌آورد.

ما در این بخش سعی خواهیم داشت تا از طریق شبیه‌سازی n=۵۰ داده از توزیع نرمال به مقایسه آزمون نرمال بودن جارکو-برا باچند روش دیگر آزمون نرمال بودن داده‌ها از جمله شاپیرو-ویلک، کلموگروف اسمیرنف و... بپردازیم بدین گونه همین آماره‌ها را برای خود داده‌های شبیه‌سازی شده و تبدیل نمایی و معکوس آنها به دست می‌آوریم و همین کار را برای ۱۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰داده شبیه‌سازی شده نیز انجام می‌دهیم که نتایج آنها در جدول ۱تا ٤ آمده است جهت اینکار از برنامه‌ای که در محیط نرم افزاری SAS نوشته شده است استفاده می‌کنیم. متن این برنامه در پیوست آمده است.

۴-مقایسه روش جارکو-برا(JB) با چند روش دیگر

همانطور که عنوان شد جهت انجام مقایسه‌ها کار را با ۵۰ داده شبیه سازی شده به ترتیب برای تبدیلات $y_i = \frac{۱}{x_i}, y_i = \exp(x_i)$ و سرانجام خود مقادیر شبیه‌سازی شده $y_i = x_i$ انجام داده‌ایم و همین کار را در مراحل بعد برای n=۱۰۰ ، n=۵۰۰ ، n=۱۰۰۰ داده نیز انجام داده‌ایم. مقادیر مربوط به آماره‌های شاپیرو-ویلک (w)، کلموگروف-اسمیرنف (D)، کرامر ون میس[2] $(w-sq)$ و اندرسون-دارلینگ[3] $(A-sq)$ و همچنین آماره JB در جداول ۱ تا ٤ به ترتیب برای n=۵۰ ، n=۱۰۰ ، n=۵۰۰ ، n=۱۰۰۰ ارائه شده‌اند.

همانطور که ملاحظه می‌شود در مرحله اول که ۵۰ تا داده شبیه‌سازی شده داریم میزان تمام آماره‌ها برای هر دو تبدیل $y = \frac{۱}{x}, y = \exp(x)$ دلالت بر رد فرض نرمال بودن داده‌ها دارد البته با توجه به مقادیر p-مقدار مشاهده می‌شود که قدرت رد فرض صفر توسط آماره‌های جارکو-برا (JB) و w بیش از بقیه است همچنین دیده می‌شود که با تبدیل $y = x$ (یعنی در خود داده‌های نرمال که شبیه‌سازی شده‌اند) میزان آماره شاپیرو-ویلک و p - مقدار آن افزایش می‌یابد و میزان آماره کلموگروف-اسمیرنف کاهش یافته که این کاهش چندان شدید نیست ولی p-مقدار آن افزایش می‌یابد.

همچنین آماره‌های $(w-sq)$ و $(A-sq)$ نیز کاهش یافته ولی p-مقدار آنها به صورت هماهنگ افزایش می‌یابد اما در آماره JB میزان آماره با تغییر تبدیلات به شدت کاهش و افزایش می‌یابد و p-مقدار آن نیز همانند آزمون شاپیرو-ویلک به شدت افزایش را نشان می‌دهد . اما میزان افزایش p-مقدار آزمون JB نسبت به آزمون شاپیرو-ویلک بیشتر بود یعنی با قدرت بیشتری فرض صفر را تأیید می‌کند اما میزان خودآماره JB با تغییر تبدیلات به شدت کاهش و افزایش می‌یابد به طوری که در حالت $y = \exp(x)$ برابر ۱۳۱/۹۹۵ و در حالت تبدیل $y = \frac{۱}{x}$ برابر ٦٨٥/٧٢٤ و در حالت تبدیل $y = x$ برابر ۱۹/۷۳٦٤ است در حالی که در سایر آماره‌ها نوسانات به این شدت نیست هر چند که p-مقدار در آزمون شاپیرو-ویلک تا حدودی در تمام

[1] Bera and Jarque

[2] Cramer and Von Miss

[3] Anderson Darling

مراحل نزدیک به $p-$مقدار در آزمون JB است ولی با تغییر تبدیلات تغییرات در مقدار آماره JB بسیار شدیدتر می‌باشد و نکته جالب توجه دیگر اینکه میزان آماره آزمون شاپیرو-ویلک در تبدیل $y=\exp(x)$ بیش از تبدیل $y=\frac{1}{x}$ بوده در تبدیل $y=x$ از هر دو حالت قبل بیشتر است اما میزان آماره آزمون JB در حالت $y=x$ از همه کمتر و در تبدیل $y=\frac{1}{x}$ از $y=\exp(x)$ بیشتر است که هماهنگی مقادیر آماره آزمون JB را مقادیر آماره آزمون شاپیرو-ویلک در جهت عکس نرمال بودن نشان می‌دهد که در آزمون شاپیرو-ویلک با نرمال شدن داده‌ها یعنی هر چه داده‌ها به حالت نرمال بودن نزدیک می‌شوند میزان آماره افزایش می‌یابد ولی در آزمون جارکو-برا عکس این حالت اتفاق می‌افتد یعنی با نزدیک شدن داده‌ها به حالت نرمال بودن از میزان آماره کاسته می‌شود.

چون میزان نرمال نبودن تبدیل $y=\exp(x)$ کمتر از تبدیل $y=\frac{1}{x}$ است همین مسأله نیز در مورد آماره‌های آزمون کرامر-ون-میس و اندرسون-دارلینگ نیز مشاهده می‌شود ولی شدت و توان آماره آزمون JB نسبت به بقیه چه با افزایش حجم نمونه و چه با تغییر تبدیلات به شدت دچار تغییر می‌شود همانطور که در جداول ۱ تا ٤ ملاحظه می‌شود توان آزمون JB با افزایش حجم نمونه رافزایش می‌یابد.

از تعمیمی از آماره آزمون جارکو-برا به همراه استفاده از الگوریتم بوت استراپ در اثبات درستی قضیه حد مرکزی بر روش تجربی و شبیه‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. مشکل تعمیم یافته این آماره در این مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$JB\left(\bar{x}\right)=B\left\{\frac{Sk^{*}\left(\bar{x}\right)^{2}}{6}+\frac{\left[k^{*}\left(\bar{x}\right)-3\right]^{2}}{24}\right\}$$

که در آن B تعداد نمونه تصادفی با جایگذاری حاصل به روش بوت استراپ حاصل از یک نمونه اصلی به حجم n از جامعه است و $Sk^{*}\left(\bar{x}\right)$ و $K\left(\bar{x}\right)$ نیز به ترتیب ضرایب چولگی و کشیدگی یک نمونه B تایی حاصل از $\bar{x}$ها است.

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به اندرسون[1] [۱] مراجعه کرد.

۵-نتیجه گیری

آماره جارکو-برا به دلیل استفاده از دو شاخصه اصلی توزیع نرمال یعنی ضرایب چولگی و کشیدگی و امکان استفاده الگوریتم بوت استراپ در حجم‌های نمونه‌ای کوچک کارآیی بسیار خوبی از خود نشان می‌دهد ضمن اینکه با افزایش حجم نمونه توان آن نیز افزایش می‌یابد اما نکته دیگر سادگی و راحتی بکارگیری و استفاده از آماره آزمون جارکو-برا که این امکان رابه همه می‌دهد با سرعت و دقت بیشتر به آزمون نرمال بودن داده‌ها بپردازند این آماره همانطور که بیان شد و در برابر تبدیلات مختلف به شدت واکنش از خود نشان می‌دهد و میزان آن دچار تغییر می‌شود و باافزایش حجم نیز بر توان آن افزوده می‌شود در حالی که در آزمونهای دیگر نرمال بودن هم ضمن مشکل بودن استفاده از آماره‌های آزمون در برابر تبدیلات گوناگون از خود تغییرات شدید را لااقل برای حالتهای با حجم نمونه‌های بزرگ نشان نمی‌دهد بنابراین، با داشتن توان بیشتر و قابلیتهایی دیگر از جمله سادگی به کارگیری آماره آزمون JB به نظر می‌رسد که استفاده از این آزمون می‌تواند اعتماد بیشتری را در جهت تعیین وضعیت نرمال بودن و یا نبودن داده‌ها فراهم آورد.

[1] Micheal K. Andenson

جدول ۳-۱ مقادیر ۵ آماره آزمون نرمال بودن برای n=۵۰ داده شبیه سازی شده

آماره	تبدیل y=exp(x)	p – مقدار	تبدیل y=1/x	p – مقدار	داده های نرمال Y=x	p – مقدار
W	۰/٦٦٢٩١٤	۰۰۰/۰	۰/٥٧٨٣٦٨	۰۰۰/	۰/٩٧٦٣١٣	۰/٤۰٩
D	۰/٢٣٨٢١٨	۰/۰١۰	۰/٢٨٤٩٨٦	۰/۰١۰	۰/۰٧٤۰٧٧	۰/١٥۰
w-sq	۰/٩٥٦٤٨٦	۰/۰۰٥	١/٣٤٩١٥٥	۰/۰۰٥	۰/۰٣٨٣٩٤	۰/٢٥۰
A-sq	٥/٣۰٦٩٥۰	۰/۰۰٥	٦/٩٢٤٩٨٩	۰/۰۰٥	۰/٢٩٨٣٨٩	۰/٢٥۰
JB	١٣١/٩٩٥	۰/۰۰۰	٦٨٥/٧٢٤	۰/۰۰۰	١٩/٧٣٦٤	۰/٥۰٢

جدول ۳-۲ مقادیر ۵ آماره آزمون نرمال بودن برای n=۱۰۰ داده شبیه سازی شده

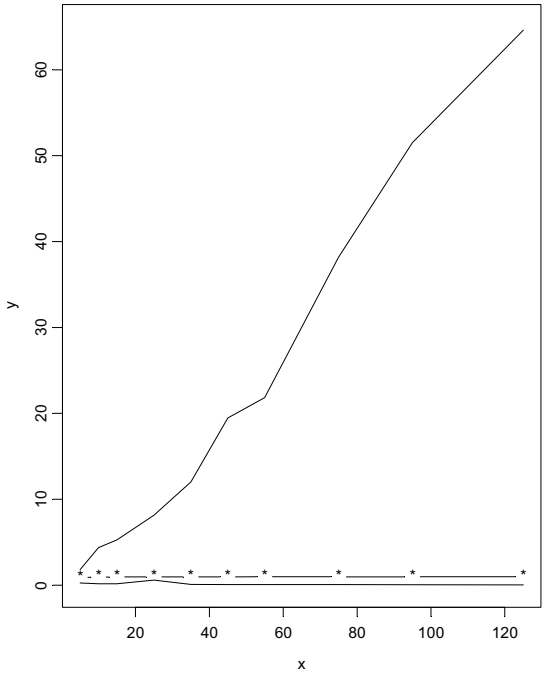
آماره	تبدیل y=exp(x)	p – مقدار	تبدیل y=1/x	p – مقدار	داده های نرمال Y=x	p – مقدار
W	۰/٧٥٦	۰۰۰/۰	۰/٤٢٣٨٨	۰۰۰/	۰/٩٧٦٣١٣	۰/٤۰٩
D	۰/٢١٥	۰/۰١۰	۰/٣٤٧٨٢	۰/۰١۰	۰/۰٧٤۰٧٧	۰/١٥۰
w-sq	١/٤٧٣	۰/۰۰٥	٣/٤٩٣٣١	۰/۰۰٥	۰/۰٣٨٣٩٤	۰/٢٥۰
A-sq	٨/٢٤	۰/۰۰٥	١٧/٥٧٧٣١	۰/۰۰٥	۰/٢٩٨٣٨٩	۰/٢٥۰
JB	٦٥/٢١١٢	۰/۰۰۰	٦٦٦٦/۰٩	۰/۰۰۰	١٩/٧٣٦٤	۰/٥۰٢

جدول ۳-۳ مقادیر ۵ آماره آزمون نرمال بودن برای n=۵۰۰ داده شبیه سازی شده

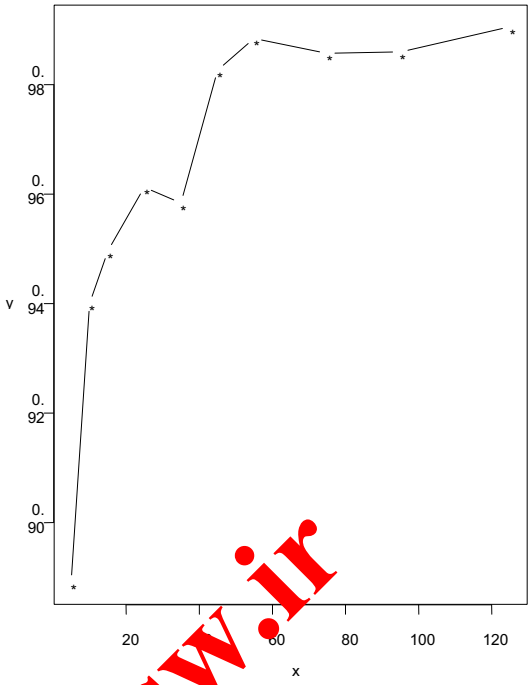
آماره	تبدیل y=exp(x)	p – مقدار	تبدیل y=1/x	p – مقدار	داده های نرمال Y=x	p – مقدار
W	۰/٧١٦٨٧	[illegible]	۰/۰٩٢٩	۰۰۰/	۰/٩٩٥٣٤٦	۰/١٤١
D	۰/٢۰٢۰٨	۰/۰١	۰/٤١۰٦	۰/۰١	۰/۰٢٩١٨٨	۰/١٥۰
w-sq	٧/٥۰٦٦٨	۰/۰۰٥	٣٣/٢٩٦٩	۰/۰۰٥	۰/۰٦۰٦١٦	۰/٢٥۰
A-sq	٤۰/٦٧[illegible]	۰/۰۰٥	١٥٧/٦۰٦٩	۰/۰۰٥	۰/٤٤٣٨٣٧	۰/٢٥۰
JB	١٤١٨/٢٥	۰/۰۰۰	٢٧٤٩٩٥۰/١٦	۰/۰۰۰	٢٤٢/٦٤۰	۰/٥٨٩

جدول ۳-۴ مقادیر ۵ آماره آزمون نرمال بودن برای n=۱۰۰۰ داده شبیه سازی شده

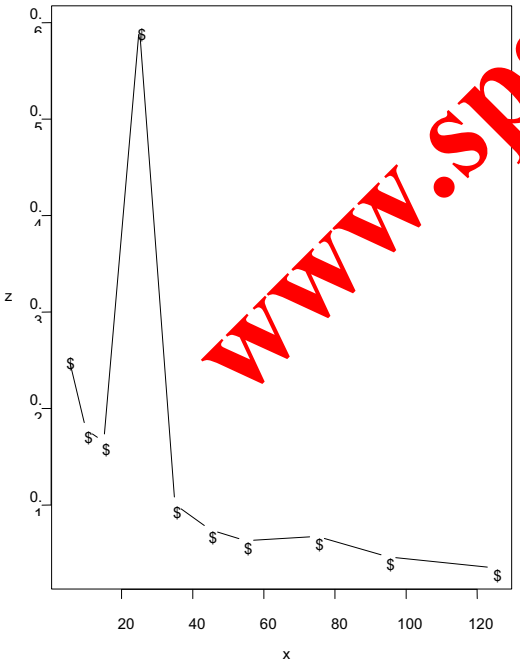
آماره	تبدیل y=exp(x)	p – مقدار	تبدیل y=1/x	p – مقدار	داده های نرمال Y=x	p – مقدار
W	۰/۰٩٤٧	۰۰۰/۰	۰/٦٦٥۰١	۰۰۰/	۰/٩٩٨٦٣٢	۰/٦٤٣
D	۰/٤١٤٧	۰/۰١	۰/٢۰٩٣٢	۰/۰١	۰/۰٢٢٩٦٨	۰/١٥۰
w-sq	٦٦/٩٥١٧	۰/۰۰٥	١٥/٢۰٩٢٣	۰/۰۰٥	۰/۰٦٤۰٣۰	۰/٢٥۰
A-sq	٣١٦/٣٥٥٨	۰/۰۰٥	٨٣/٢٩٩١	۰/۰۰٥	۰/٣٨٥۰٥٤	۰/٢٥۰
JB	٥۰٤٧١٩٦/١٨	۰/۰۰۰	١٦٨٢٢/٦٥	۰/۰۰۰	٤٣٦/٢٧٦	۰/٦٥١



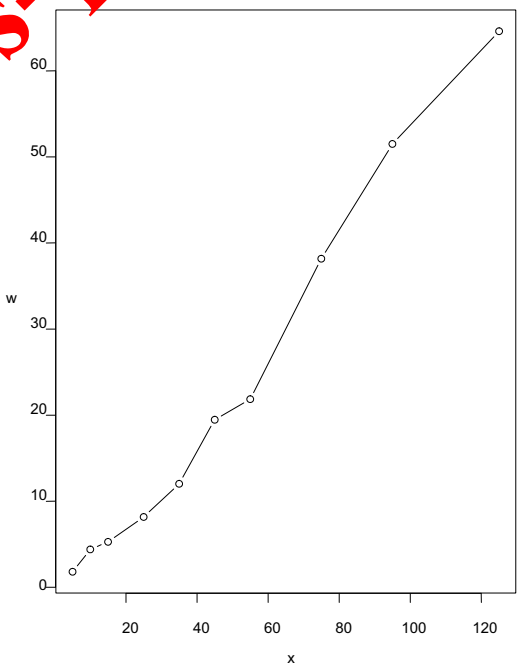
(۱) نمودار تغییرات سه آماره‌ی w ، D و JB برای n های مختلف



(۲) نمودار تغییرات آماره‌ی W برای n های مختلف



(۳) نمودار آماره‌ی D برای n های مختلف



(٤) نمودار تغییرات آماره‌ی JB برای nهای مختلف

پیوست

برنامه تهیه شده به کمک نرم‌افزار SAS جهت شبیه سازی n داده نرمال و انجام آزمون نرمال بودن برای تبدیل y=exp(x) به عنوان نمونه و همچنین محاسبه مقدار آماره‌ی جارکو - برا .

```
data Hossain;
   do i=o to n ;
   Hossain = rannor (326);
   y = Hossain;
   if i>0 then output;
   end;
   run;
data y1;
   set y;
   t=exp (y);
   Proc = Capabitity normallest;
   Var
   cs plot t;
   run;
Proc means data = Hossain noprint skewness
kurtosis;
   vart ;
   out put out = ali skewness = skew
kurtosis = kurt;
   run;
daf new;
   set ali ;
   n=freq - ;
   jb= (n/6) * (skew ** 2 + ((kurt – 3 ) ** 2 ) /
4);
   run;
data new1;
   set new
   Proc print data new 1;
   Var n skew kurt jb;
   run;
```


منابع

[1]. Anderson, M. K. (2001). A normality test for the mean estimator. Applied Economics Letters, Vol. 8, NO. 9, 633-634.

[2]. D' Agostino, R. B. and Stephen, M. A., (1997). Goodness of fit techniques. Marcel Dekker, New York.

[3]. Bera. A. K. and Jarque C. M. (1981). An efficient large–sample test for normality of observations and regression residuals. Working Papers in Economics and Econometrics, 40, Austration National University.

[4]. Birnbarm, Z.W. (1965). Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size. Journal of the American Statistial Association, 60, 854–58.

[5]. Conver, W.J. (1971). Practical non para metric statistics. Wiley, New York.

[6]. Goodman, L.A. (1954). Kolmogorov–Smirnov tests for psychological resrarch. Bulletin, 51, 160 – 168.

[7]. Massey, F.J. (1951). The Kolmogorov – Smirnov test for goodness of fit. Journal of the American Statistical Association, 46, 68 –78.

[8]. Stakter, M.J. (1965). A comparison of the Pearson chi–square and Kolmogorov goodness of fit tests with respect to validity. Journal of the American statistical Association, 60, 907-911.